2 $|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$ $\qquad x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Γνωρίζουμε: $x_n - x_{n-1} = \varphi(x_{n-1}) + \varphi(x_{n-2})$

$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})|$

$\le L|x_{n-1} - x_{n-2}|$

Δηλαδή επαγωγικά $|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1}|x_1 - x_0|$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ζητώ τη διαφορά $x_{n+k} - x_n$

Γράφω τη διαφορά ως εξής

$x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + \dots + x_{n+1} - x_n =$

$(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)$

Δηλαδή $|(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$

Τριγωνική ανισότητα $\le |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$

$\le L^{n+k-1}|x_1 - x_0| + L^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \dots + L^n|x_1 - x_0|$

$= L^n \underbrace{(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + 1)}_{\frac{1-L^k}{1-L} < \frac{1}{1-L}} |x_1 - x_0| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$

Ζητάμε $\lim_{k\to\infty} x_{n+k} = x^*$, διότι η φ είναι συνεχής

και η ακολουθία συγκλίνει άρα $x^* = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1})$

$= \varphi(\lim x_{n-1}) = \varphi(x^*)$

Δ.Σ. $|x^* - x_n| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

3. $|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

Θέτω $y_0 = x_{n-1}$ και $y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$
Γιατί γνωρίζω το αποτέλεσμα 2!

$|y_1 - x^*| \le \frac{L}{1-L} |y_1 - y_0|$ συνεπώς

$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

<u>Παρατηρήσεις</u> - Η 3 είναι "καλύτερη" από την 2. $\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \le \frac{L}{1-L} L^{n-1} |x_1 - x_0|$

$= \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

- Η 3 είναι aposteriori (εκ των υστέρων) πληροφορία. Η 2 είναι apriori (εκ των προτέρων) εκτίμηση

<u>Η περίπτωση L=1</u>

Παράδειγμα : $\varphi(x) = -x \ , \ x \in [-1,1]$

$\cdot \ \varphi : [-1,1] \to [1,1]$

$\cdot \ \varphi(x) - \varphi(y) = -x - (-y) = y - x$

Συνεπώς $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$

Όμως για $x_0 \in [-1,1]$ η ακολουθία $x_n = \varphi(x_{n-1})$ παράγει τους όρους $x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, -x_0$ ...
Η ακολουθία <u>δεν</u> συγκλίνει!

<u>Τάξη σύγκλισης ακολουθιών</u>
(ταχύτητα)

<u>Ορισμός</u> : Έστω $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και x^* το όριο της. Τότε λέμε ότι η $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον ένα, αν $\exists$ $C < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε
$\forall \ n \geq N : |x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|$

υπάρχει C τέτοιο ώστε
$\forall \ n \in \mathbb{N} : |x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^p$
$p = 2$ τετραγωνική σύγκλιση ή τάξης 2
$p = 3$ κυβική σύγκλιση ή τάξης 3

Παρατήρηση α) Αν η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) p, τότε είναι και τουλάχιστον q, για $1 \le q \le p$.

b) Πως προσδιορίζουμε τη τάξη σύγκλισης!
Εν γένει δύσκολο ζήτημα

Η περίπτωση $x_n \neq X$
Τότε το κριτήριο σύγκλισης γράφεται

$$\left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Πλέον η ακολουθία $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$ είναι φραγμένη

Μια ικανή συνθήκη είναι η ακολουθία να συγκλίνει

Επιστρέφουμε στο θεώρημα της συστολής

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \Rightarrow$$

$$|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| \le L |x_n - x^*| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$L < 1$

Δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) ένα.
Μπορώ να έχω σύγκλιση καλύτερη/γρηγορότερη από ένα!
Θεωρούμε $\varphi \in C_1[a,b]$. Τότε
$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) \overset{?}{=} \varphi'(\xi_n) \cdot (x_n - x^*) \quad x^* < \xi_n < x_n$